

طراحی شبکه‌های هاب سلسله مراتبی حلقوی

علیرضا عیدی*

خالد برزگر**

پذیرش: ۹۶/۱۰/۲

دریافت: ۹۶/۶/۳۱

مکان‌یابی هاب / شبکه‌های سلسله مراتبی / شبکه حلقوی / مدل‌سازی ریاضی.

چکیده

در این مقاله مسأله جایابی شبکه‌ای از هاب‌های سلسله مراتبی با ساختار حلقوی معرفی شده است. مسأله مفروض را می‌توان به عنوان تلفیقی از شبکه هاب میانه سلسله مراتبی و شبکه هاب حلقوی دو لایه دانست. در مدل ارائه شده مکان‌یابی هاب‌های اصلی و ثانویه به نحوی انجام می‌شود که هزینه‌های ارسال جریان در شبکه نهایی کمینه شود. در طراحی شبکه هاب تحقیق حاضر هاب‌های اصلی به شکل حلقه به یکدیگر متصل می‌شوند و در ادامه تخصیص هاب‌های ثانویه و گره‌های تقاضا در شبکه با هدف بهینه‌سازی هزینه صورت می‌گیرد. چنین مسأله‌ای در شبکه‌های مخابراتی و خطوط حمل و نقل سریع هنگامی که ایجاد اتصال نقطه به نقطه مابین تمام گره‌های تقاضا به لحاظ هزینه مقرون به صرفه نباشد کاربرد دارد. در این مقاله دو مدل برای مسأله پیشنهاد شده است. در ابتدا مدلی با متغیرهای سه اندیسه (شاخص) برای مسأله ارائه گردید که مدل مبتنی بر جریان نامیده می‌شود سپس مدل جدیدی با معرفی متغیرهای چهار اندیسه ارائه گردید که مدل مبتنی بر مسیر نامگذاری شده است. برای حل مدل‌های مورد بحث از دو حل‌کننده نرم افزاری Cplex و Xpress در محیط نرم افزار

بهینه‌سازی GAMS استفاده شده و در انتها مدل و حل کننده بهتر با توجه به نتایج به دست آمده معرفی شده است. همچنین با تغییر در پارامترهای ورودی حل کننده نرم‌افزاری زمان حل مسأله کاهش یافت. در این مقاله از مجموعه داده شناخته شده شبکه پستی ترکیه برای ارزیابی و اعتبار سنجی مدل‌ها استفاده شده است

طبقه‌بندی JEL: CG1

مقدمه

هاب‌ها^۱ تسهیلات ویژه‌ای هستند که کاربرد وسیعی در حمل و نقل، مخابرات، لجستیک و پست دارند. در واقع به جای اتصال مستقیم تمام نقاط به یکدیگر تعدادی از نقاط تقاضای موجود در شبکه به عنوان هاب (واسط) انتخاب گردیده و جریان در شبکه ابتدا به این نقاط واسط ارسال سپس به مقصد فرستاده می‌شود. استفاده از ساختار هاب-گره ضمن کاهش قابل توجه در هزینه‌های توسعه شبکه (کاهش قابل توجه تعداد کمان‌های موصلاتی) امکان استفاده از صرفه جویی مقیاس^۲ بر روی کمان‌های هاب را فراهم می‌سازند. پس از تحقیق بنیادی اوکلی^۳ که مسائل جایابی هاب را معرفی و مدلی ریاضی برای آن ارائه داد، چندین کلاس متفاوت از مسائل هاب توسعه داده شده و مورد تحقیق قرار گرفته‌اند. به طور کلی مسائل مکان‌یابی هاب به چهار نوع زیر تقسیم‌بندی می‌شوند: ۱- مسأله مکان‌یابی هاب-میانه ۲- مسأله مکان‌یابی هاب با هزینه ثابت ۳- مسأله مکان‌یابی هاب-مرکز ۴- مسأله مکان‌یابی هاب پوششی. تابع هدف در مسائل نوع اول و دوم از دسته بندی فوق، به صورت کمینه‌سازی مجموع هزینه‌هاست. در مسائل نوع اول، تنها به کمینه‌سازی کل هزینه‌های جریان عبوری پرداخته می‌شود. زیرا تعداد تسهیلات (هاب‌ها) و هزینه مرتب بر آنها مشخص است. اما در مسائل نوع دوم، چون تعداد تسهیلات نامشخص است؛ هزینه‌های تأسیس تسهیلات نیز به تابع هدف افزوده می‌گردد^۴. در مسائل هاب مرکز تابع هدف عبارتست از کمینه‌سازی بیشترین طول یا هزینه هر مسیر در شبکه و در مسأله هاب پوششی تابع هدف کمینه‌سازی تعداد هاب‌های احداثی ضمن پوشش تقاضای موجود در شبکه می‌باشد.

در شبکه‌های هاب-گره تخصیص نقاط تقاضا به هاب‌ها به دو صورت انجام می‌گیرد: تخصیص تکی و تخصیص چندگانه. در حالت اول هر گره غیر هاب تنها می‌تواند به یک هاب اختصاص یابد. اما در حالت تخصیص چندگانه، مسأله از این قید آزاد می‌شود و گره‌های غیر هاب می‌توانند به بیش از یک هاب اختصاص یابند. همچنین در ارتباط با هاب‌ها و یال‌ها (مسیرهای انتقال جریان)، برخی از مواقع با محدودیت میزان جریان عبوری

1. Hub.

2. Economies of scale.

3. O'Kelly (1987).

4. Farahani et. al. (2013).

5. Farahani et. al. (2013).

مواجه هستیم که این گونه مسائل را ظرفیت دار گویند. اما در حالات بدون ظرفیت، این چنین محدودیت‌هایی برای مساله وجود ندارد.^۱

یکی از مفروضاتی که در حالت کلاسیک جایابی هاب به چشم می‌خورد فرض کاملدر نظر گرفتن شبکه هاب است.^۲ در حالت کلاسیک، از هر کدام از هاب‌های انتخابی؛ یال‌هایی به تمام هاب‌های دیگر وصل شده و شبکه هاب کامل تشکیل می‌شود. نباید از نظر دور داشت با توجه به محدودیت‌های فراوانی که تصمیم‌گیران به ویژه در ارتباط با بودجه با آن مواجه‌اند در بسیاری از مواقع داشتن شبکه هاب کامل در ساختارهای هاب-گره شدنی نیست و برای پوشش تقاضای موجود در سیستم می‌بایست به خطوط ارتباطی کمتر اکتفا نمود. در ارتباط با این دسته از مسائل، کمپل و همکاران^۳ مسائل جایابی کمان هاب را برای اولین بار معرفی کردند. مسائلی که به جایابی کمان‌های هاب به جای مکان‌یابی گره‌های هاب می‌پردازد. در مسأله آنها، تعداد مشخصی یال هاب (با هزینه حمل مشمول تخفیف) به گونه‌ای جایابی می‌شود که هزینه‌های حمل و نقل تحمیل شده به سیستم کمینه شود. نه تنها فرض کامل بودن شبکه هاب، بلکه متصل بودن گراف هاب‌ها نیز در این کار نادیده گرفته شده است. آنها در تحقیقات خود، مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح با فرض تخصیص چندگانه برای چهار حالت خاص ارائه داده‌اند و از یک الگوریتم مبتنی بر شمارش برای حل مسائل جایابی یال بهره‌جسته‌اند.

آلومیور و کارا^۴ مسأله طراحی شبکه هاب پوششی با ساختار ناقص را مورد بررسی قرار دادند. آنها در مسأله خود فرض کردند که در مسیرهای طراحی شده بین هر مبدأ و مقصد بیش از سه هاب نمی‌تواند وجود داشته باشد. کالیک و همکاران^۵ نیز برای حل مسأله تک تخصیص هاب پوششی با ساختار غیر کامل شبکه هاب، از یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر جستجوی ممنوع استفاده کردند. یون و کیورنت^۶ مسأله طراحی شبکه هاب ناقص را برای هر دو حالت هزینه کمان (ثابت و متغیر) مورد بررسی قرار دادند. مدل ارائه شده

-
1. Farahani et. al. (2013).
 2. Complete hub network.
 3. Campbell et. al. (2005).
 4. Alumur /Kara (2009).
 5. Calik et. al. (2009).
 6. Yoon /Current (2008).

توسط آنها مجموع هزینه‌های حمل و نقل، هزینه‌های جایابی هاب و کمان‌های هاب را کمینه می‌کند. آلومیور و همکاران^۱ مسأله تک تخصیص طراحی شبکه هاب را در نظر گرفته و برای هر چهار نسخه عنوان شده پیشین، مدل‌های ریاضی کارایی ارائه داده‌اند. آنها همچنین در تحقیق خود نشان دادند که در اغلب مثال‌ها، برای دست‌یابی به یک سطح خدمت مشخص (انتقال کالا/مسافرین در یک زمان مشخص) کامل بودن شبکه هاب الزامی نیست. در یکی از تحقیقات صورت پذیرفته با کاربری در بخش حمل و نقل، می‌توان به تحقیق گلاره و نیکل^۲ اشاره کرد که طراحی شبکه هاب ناقص با فرض تخصیص چندگانه را مد نظر قرار داده و با استفاده از روش تجزیه بندرز و نیز یک الگوریتم حریمانه به حل آن پرداخته‌اند. کریمی و ستاک^۳ به مطالعه شبکه‌ای از هاب‌های ناقص پرداختند که هدف از طراحی آن زمانبندی خروج جریان از گره‌ها به نحوی بود که جریان در زمان از پیش تعیین شده‌ای به مقصد برسد. کامارگو و همکاران^۴ برای شبکه‌ای از هاب‌های ناقص در دو حالت وجود و عدم وجود محدودیت‌های هوپ^۵ مدل‌های ریاضی و الگوریتم حل دقیق بندرز ارائه دادند. محدودیت‌های هوپ به محدودیت‌هایی گفته می‌شود که تعداد هاب‌ها مابین دو گره در شبکه را محدود می‌کنند. در برخی از پژوهش‌های صورت پذیرفته با فرض شبکه هاب ناقص، توپولوژی از پیش تعیین شده‌ای برای طراحی شبکه در نظر گرفته می‌شود. یامان^۶ مسأله هاب میانه با توپولوژی ستاره‌ای را مدل نموده و از یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژی برای حل مسأله استفاده کرد. گلاره و پیشینگر^۷ از ساختار زنجیری برای شبکه هاب خود، با کاربری در حمل و نقل دریایی، استفاده کرده و از روش تجزیه اولیه برای حل مدل استفاده کرده‌اند.

لی و همکاران^۸ مسأله جایابی تعدادی هاب و اتصال آنها به کمک درخت را مورد بررسی قرار دادند. در کار آنها هزینه غالب سیستم، احداث تسهیلات شبکه بوده است. کونتراس

1. Alumur et. al. (2009).

2. Gelareh /Nickel (2011).

3. Karimi /Setak (2016).

4. de Camargo et. al. (2017).

5. Hop-constraints.

6. Yaman (2008).

7. Gelareh /Pisinger (2011).

8. Lee et. al. (1996).

و همکاران^۱ نیز نخستین بار مسأله‌ای تحت عنوان جایابی درختی از هاب‌ها^۲ را معرفی کردند. در این کار با فرض جایابی تعداد مشخصی از هاب‌ها، از توپولوژی درختی برای طراحی شبکه هاب استفاده شده و در نهایت تخصیص تکی گره‌های غیر هاب انجام می‌شود. به عبارت دیگر، شبکه هاب-گره مدنظر در کار آنها، دو سطحی بوده و به شکل درخت-ستاره فرض شده است که این ساختار خود معرف یک درخت بزرگتر است. در تحقیق یاد شده کمینه سازی هزینه انتقال جریان‌ها مدنظر بوده و برای حل مسأله مذکور از روش شاخه و برش استفاده کردند. آنها همچنین در ادامه^۳، مدلی چهار شاخصه مبتنی بر جریان برای این مسأله ارائه و نشان دادند که این مدل کران‌های فشرده‌تری به دست می‌دهد. آنها همچنین از آزادسازی لاگرانژی برای تجزیه مدل یاد شده استفاده کردند. آنها برای به دست آوردن یک حل شدنی (کران بالایی مسأله کمینه سازی) در هر مرحله از حل دوگان لاگرانژی، از یک الگوریتم ابتکاری استفاده کرده‌اند که به این ترتیب روش آزاد سازی لاگرانژی آنها با به دست دادن کران‌های بالا و پایین نزدیک به هم قادر به حل مسائل بزرگتر در زمانی مناسب شدند. در نهایت دسا و همکاران^۴ با ارائه یک الگوریتم دقیق مبتنی بر تجزیه بندرز مسائلی با ۱۰۰ گره در شبکه را حل نمودند. یکی از توپولوژی‌های مورد بحث که ساختار آن برای توسعه شبکه‌های هاب گران قیمت مناسب است شبکه هاب حلقوی^۵ است. در ارتباط با شبکه‌های حلقوی مسائلی تحت عنوان حلقه-ستاره توسط لابه و همکاران^۶ معرفی گردید. هدف این گونه مسائل انتخاب یک حلقه از میان تعدادی گره و اختصاص دیگر نقاط به نزدیک‌ترین گره موجود در حلقه مذکور به نحوی است که هزینه‌های ایجاد شبکه کمینه شود. مسأله مرتبط دیگر حلقه میانه است که در مرجع^۷ معرفی شده است. کاربرد این مسأله برای تاسیسات زیربنایی حلقوی شکل است و هدف آن یافتن حلقه‌ای از گره‌ها به گونه‌ای است که هزینه کل تخصیص گره‌های خارج از حلقه به گره‌های حلقه انتخابی از

1. Contreras et. al. (2010).

2. Tree of hubs location problem

3. Contreras et. al. (2009).

4. de Sá et. al. (2013).

5. Cycle hub location

6. Labbé et. al. (2004).

7. Labbé et. al. (2005).

مقدار بودجه مشخص شده بیشتر نشود. کیورنت و شیلینگ^۱ و گندریو و همکاران^۲ حالت پوششی مسأله حلقه-ستاره را مورد مطالعه قرار دادند. در این مسائل می‌بایست فاصله هر گره خارج از حلقه انتخابی تا نزدیک‌ترین گره در حلقه از مقدار مشخصی بیشتر نشود. همچنین کیورنت و شیلینگ مسأله تور میانه را در مرجع^۳ معرفی کردند که در آن حلقه‌ای با p گره تشکیل می‌شد. نکته مشترک در همه مسائل فوق تنها تاکید بر هزینه‌های استقرار تاسیسات در شبکه است و جریان‌ها در شبکه مورد توجه قرار نمی‌گیرند. اما کونتیراس و همکاران^۴ در تحقیق خود علاوه بر توسعه مدل ریاضی، یک الگوریتم شاخه و برش و یک الگوریتم فراابتکاری جستجوی انطباقی حریمانه^۵ توسعه دادند. در واقع مسأله شبکه هاب حلقوی مسأله‌ای تک تخصیصه است که در آن هاب‌های موجود در شبکه با ساختار حلقوی به یکدیگر وصل می‌شوند و در ادامه گره‌های غیر هاب به هاب‌های انتخابی تخصیص می‌یابند ساختار شبکه مورد بحث در این حالت حلقه-ستاره است.

جنبه دیگر مورد توجه ما استفاده از ساختار سلسله مراتبی در شبکه است. در این ارتباط یامان^۶ به مسأله هاب میانه سلسله مراتبی با سه سطح پرداخته است. او برای سطوح شبکه هاب‌های مرکزی، ساختار کامل در نظر گرفته است که در ادامه هاب‌های نوع دوم به صورت تخصیص تکی به هاب‌های مرکزی این شبکه متصل می‌شوند. در انتها نیز گره‌های غیر هاب به یکی از این دو نوع هاب اختصاص می‌یابند. وی برای این مسأله، مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح درجه دو ارائه نمود و سپس به خطی‌سازی تابع هدف مدل خود پرداخته است. مدل معرفی شده توسط او در شبکه‌های جابه‌جایی بار کاربرد دارد. شبکه توسعه داده شده در این حالت به صورت ساختار سه لایه کامل-ستاره-ستاره بوده است. آلومیور و همکاران^۷ نیز برای مسأله هاب سلسله مراتبی چندمده، مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه داده و به تحلیل حساسیت آن پرداخته‌اند. در شبکه هاب سلسله مراتبی مدنظر آنها یک شهر ثابت به عنوان هاب مرکزی در نظر گرفته شده و لایه‌ها به صورت ستاره-توری-ستاره بوده است.

1. Current /Schilling (1994).

2. Gendreau et. al. (1997).

3. Current /Schilling (1994).

4. Contreras et. al. (2016).

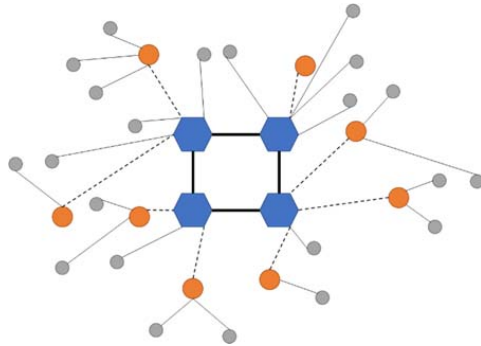
5. Greedy randomized adaptive search

6. Yaman (2009).

7. Alumur et. al. (2012).

دوکانچی و کارا^۱ شبکه هاب سلسله مراتبی چند مده را مورد مطالعه قرار دادند که هدف از توسعه آن پوشش و زمانبندی جریان در شبکه با کمترین هزینه بود. شبکه مذکور دارای سه لایه بوده و در هر لایه وسایل نقلیه متفاوت مورد استفاده قرار گرفت. آنها پس از ارائه مدل با معرفی تکنیک‌های پیش‌پردازش و نامساوی‌های معتبر به بهبود مدل خود پرداخته‌اند.

با توجه به بحث‌های صورت گرفته، استفاده از دو نوع هاب در شبکه با ساختار سلسله مراتبی مد نظر است؛ در واقع در بعضی مسائل واقعی همچون جابه‌جایی کالا و حمل و نقل عمومی با این گونه ساختارها روبرو هستیم. به عنوان نمونه در حمل و نقل عمومی اگر خطوط قطارهای سریع‌السیر یا مترو را به عنوان شبکه هاب اصلی در نظر گرفته و تسهیلات دیگر به عنوان هاب‌های ثانویه استفاده کنیم یک شبکه هاب سلسله مراتبی خواهیم داشت. یکی دیگر از کاربردهای ساختارهای حلقوی سلسله مراتبی می‌تواند در شبکه‌های مخابراتی باشد، در این ساختارها تجهیزات مخابراتی به عنوان هاب مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال در شبکه‌های فیبر نوری وقتی دو نوع منشعب‌کننده در شبکه وجود دارد و هزینه مرتبط با توسعه تجهیزات زیاد باشد ساختار حلقوی نسبت به دیگر حالت‌ها دارای مزیت خواهد بود. شبکه هاب سلسله مراتبی مورد بحث ما در شکل (۱) نشان داده شده است. شبکه مذکور دارای سه سطح خواهد بود. در لایه اول هاب‌های اصلی (شش گوشه‌ها) قرار دارند که تشکیل یک حلقه می‌دهند. این قسمت نشان‌دهنده بخش اصلی بوده که لزوماً باید به هم پیوسته باشد به عنوان مثال خطوط مترو در شبکه حمل و نقل عمومی یک شهر بزرگ. در ادامه هاب‌های ثانویه (بخش تغذیه‌کننده شبکه اصلی-دوایر بزرگ) قرار دارند. در انتها نیز نقاط تقاضا (دوایر کوچک) به یکی از هاب‌های انتخابی متصل می‌شوند. در واقع شبکه مدنظر تحقیق حاضر ساختار حلقه-ستاره-ستاره خواهد داشت. توجه شود در شبکه شکل (۱) خطوط ضخیم کمان هاب اصلی و خطوط خط چین کمان هاب لایه دوم یا ثانویه هستند. همان‌طور که قبلاً نیز بحث شد هدف از طراحی شبکه هاب حلقوی سلسله مراتبی یافتن نقاط بهینه هاب‌های اصلی و ثانویه و مسیریابی ترافیک به نحوی است که هزینه‌های عبور جریان بر روی شبکه کمینه شود.



شکل ۱- شبکه هاب سلسله مراتبی با ساختار مرکزی حلقوی

در ادامه تحقیق حاضر و در بخش بعدی، دو مدل ریاضی برای مسئله پیشنهاد شده است. سپس در بخش بعد از آن مدل‌های ریاضی به لحاظ محاسباتی مورد ارزیابی قرار گرفته و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در انتها نتایج و پیشنهادات آتی مطرح گردیده است.

۱. مدل‌سازی

در ابتدا علایم و مجموعه‌های ریاضی مورد استفاده معرفی شده است:

مجموعه گره‌های شبکه	N $= \{1, 2, 3, \dots, n\}$
نقاط کاندید برای احداث هاب‌های ثانویه ($H \subseteq N$)	H
نقاط کاندید برای احداث هاب‌های اصلی (مرکزی) ($C \subseteq N$)	C
تعداد هاب‌های اصلی که باید ایجاد شود.	p
تعداد هاب‌های ثانویه	q
$r \in N$ به $i \in N$ هزینه ارسال یک واحد جریان از گره	c_{ir}
$(i, r \in N)$ مقدار جریانی که باید از گره i به گره r فرستاده شود.	f_{ir}
i کل جریانی که از گره نشأت می‌گیرد.	$O_i = \sum_{r \in N} f_{ir}$
i کل جریانی که باید به گره فرستاده شود.	$D_i = \sum_{r \in N} f_{ri}$
ضریب تخفیف مورد استفاده در لایه اصلی	α_c
ضریب تخفیف مورد استفاده در لایه ثانویه	α_h

در ابتدا یک مدل ریاضی با متغیرهای سه شاخصه برای فرموله نمودن جریان در شبکه ارائه می‌شود. این متغیرها بیانگر مقدار جریانی است که از یک گره خاص نشأت گرفته و از یک کمان هاب عبور می‌کنند. به طور کلی مدل سه شاخصه دارای دو دسته متغیر باینری برای فرموله نمودن مکان‌ها و نحوه تخصیص گره‌ها در شبکه و دو دسته متغیر پیوسته به منظور فرموله نمودن مسیرهای عبور جریان در شبکه است. متغیرهای تصمیم مسأله برای مدل سه شاخصه به شرح زیر است: متغیر دودویی z_{ijl} برابر یک است اگر گره تقاضای i به هاب ثانویه z اختصاص یافته و هاب z نیز به هاب مرکزی l اختصاص یابد. اگر z_{ijl} برابر یک شود نقطه z هاب ثانویه و l هاب مرکزی است. همچنین اگر z_{ill} برابر یک شود نقطه l یک هاب مرکزی خواهد بود. متغیر دودویی y_{kl} برابر یک است اگر یک کمان اصلی (مرکزی) هاب بر روی کمان $k-l$ احداث شود. متغیر پیوسته w_{ijl} معرف مقدار جریانی است که از گره i نشأت گرفته و از کمان هاب ثانویه $z-l$ عبور می‌کند. متغیر t_{ikl} بیانگر مقدار جریانی است که از گره i نشأت گرفته و از کمان هاب مرکزی $k-l$ عبور می‌کند. مدل پیشنهادی سه شاخصه به صورت زیر است:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in H} \sum_{l \in C} (C_{ij} O_i + C_{ji} D_i) z_{ijl} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in H} \sum_{l \in C \setminus \{H\}} \alpha_h C_{jl} w_{ijl} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in C} \sum_{l \in C \setminus \{j\}} \alpha_c C_{jl} t_{ijl} \quad (1)$$

$$z_{ijl} \leq z_{jzl} \quad \forall i \in N, j \in H \setminus \{i\}, l \in C \quad (2)$$

$$\sum_{j \in H} \sum_{l \in C} z_{ijl} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3)$$

$$y_{kl} \leq z_{lll} \quad \forall [k, l] \in C: k < l \quad (4)$$

$$y_{kl} \leq z_{kkk} \quad \forall [k, l] \in C: k < l \quad (5)$$

$$\sum_{j \in H} z_{ijl} \leq z_{lll} \quad \forall i \in N, l \in C \setminus \{i\} \quad (6)$$

$$\sum_{l \in C} z_{lll} = p \quad (7)$$

$$\sum_{j \in H} \sum_{l \in C \setminus \{j\}} z_{jzl} = q \quad (8)$$

$$\sum_{k \in C} \sum_{l \in C: k < l} y_{kl} = p \quad (9)$$

$$\sum_{k \in C} \sum_{l \in C: k < l} y_{kl} + \sum_{k \in C} \sum_{l \in C: k > l} y_{lk} = 2z_{kkk} \quad \forall k \in N \quad (10)$$

$$z_{ijl} = 0 \quad \forall j \in H, l \in C \setminus \{l\} \quad (11)$$

$$\sum_{k \in C \setminus \{l\}} t_{ilk} - \sum_{k \in C \setminus \{l\}} t_{ikl} = \quad (12)$$

$$\sum_j \sum_r f_{ir} (z_{ijl} - z_{rjl}) \quad \forall i \in N, l \in C$$

$$w_{ijl} \geq \sum_{r \in N \setminus \{j\}} (f_{ir} + f_{ri})(z_{ijl} - z_{rjl}) \quad \forall i \in N, j \in H, l \in C \setminus \{j\} \quad (13)$$

$$t_{ikl} + t_{ilk} \leq O_i y_{kl} \quad \forall i \in N, \forall [k, l] \in C: k < l \quad (14)$$

$$w_{ijl} \geq 0 \quad \forall i \in N, j \in H, l \in C \quad (15)$$

$$t_{ikl} \geq 0 \quad \forall i \in N, \forall (k, l) \in C \quad (16)$$

$$z_{ijl} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, j \in H, l \in C \quad (17)$$

$$y_{kl} \in \{0, 1\} \quad \forall [k, l] \in C: k < l \quad (18)$$

در تابع هدف رابطه (۱) عبارت نخست هزینه کل عبور جریان از گره‌های تقاضا به سوی هابها را محاسبه می‌کند. عبارت دوم در تابع هدف هزینه کل انتقال جریان از هاب‌های ثانویه به هاب‌های اصلی و در نهایت عبارت سوم هزینه عبور جریان بر روی حلقه مرکزی است. محدودیت رابطه (۲) اطمینان از این امر است که اگر گره تقاضایی به هاب ثانویه j و هاب مرکزی l وصل باشد باید نقطه z یک هاب ثانویه باشد. رابطه (۳) تضمین می‌کند هر گره در شبکه به یک هاب ثانویه و یک هاب مرکزی متصل شود و یا اینکه خود یک هاب باشد. روابط (۴) و (۵) اطمینان از این امر است که مابین نقاط k و l تنها در صورتی می‌تواند کمان هاب مرکزی ایجاد شود که هر دو سر این کمان هاب اصلی باشد. اگر گره i به هاب اصلی (۱) اختصاص یابد پس (۱) باید یک هاب مرکزی بوده باشد که از طریق رابطه (۶) این تضمین بوجود می‌آید. تعداد هاب‌های حلقه مرکزی و لایه دوم از طریق محدودیت‌های (۷) و (۸) مشخص می‌شوند. برای تشکیل حلقه در لایه مرکزی باید تعداد کمان در این لایه برابر با تعداد هاب‌های اصلی باشد که از طریق روابط (۹) و (۱۰) این امر محقق می‌شود. در واقع رابطه (۱۰) بیان می‌کند که هر هاب لایه اصلی باید دقیقاً به دو هاب مرکزی دیگر متصل شود. رابطه (۱۱) غیر ضروری است اما می‌تواند باعث بهبود کیفیت کران پایین مسأله خطی آزاد شده شود. اگر گره i به هاب اصلی (۱) اختصاص یابد بنابراین باید جریانی از گره i که به هاب‌های مرکزی دیگر تعلق دارد گره (۱) را ترک کند. همچنین اگر گره i به هاب اصلی (۱) اختصاص نیابد باید جریان مربوط به گره‌های دیگر که به هاب (۱) اختصاص یافته‌اند ابتدا وارد هاب (۱) شوند. موارد مذکور از طریق محدودیت‌های تعادل جریان در شبکه یعنی رابطه

(۱۲) تضمین می‌شود. جریان‌های برآمده از گره i که از طریق هاب ثانویه زوارد هاب مرکزی (I) می‌شوند از طریق محدودیت (۱۳) محاسبه می‌شوند. در اینجا توجه شود اگر دو گره به صورت همزمان به یک هاب ثانویه متصل شوند جریان مابین آنها وارد هاب مرکزی نخواهد شد که در محدودیت (۱۳) لحاظ شده است. محدودیت (۱۴) بیانگر این نکته است که جریان مابین گره‌ها تنها در صورتی می‌تواند از یال هاب اصلی $k-l$ عبور کند که مابین این دو نقطه یک کمان هاب اصلی احداث شود. مابقی محدودیت‌ها بیانگر علامت و نوع متغیرها هستند. مدل فوق را در محاسبات Model1 می‌نامیم. در ادامه مدل چهار شاخصه برای مسأله مدنظر آورده می‌شود. مدل مزبور مبتنی بر مسیر خوانده می‌شود چرا که به جای تاکید بر جریان‌ات نشات گرفته از هر گره بیانگر مسیرهای مابین گره‌هاست. بدین منظور دو دسته متغیر چهار اندیشه دیگر معرفی می‌شود. متغیر x_{irkl} برابر یک است اگر جریان بین گره‌های i و r از هاب‌های مرکزی k و l عبور کند. همچنین متغیر h_{irjl} برابر یک خواهد بود اگر جریان مابین جفت گره i و r از کمان هاب ثانویه j عبور کند که در آن ز هاب ثانویه و (I) هاب اصلی است.

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \sum_{j \in H} \sum_{l \in C} (C_{ij}O_i + C_{ji}D_i) z_{ijl} \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{r \in I: r > i} \sum_{j \in H} \sum_{l \in C \setminus \{j\}} \alpha_h c_{jl} (f_{ir} + f_{ri}) h_{irjl} \\ & + \sum_{i \in I} \sum_{r \in I: r > i} \sum_{k \in C} \sum_{l \in C \setminus \{k\}} \alpha_c (c_{kl} f_{ir} + c_{lk} f_{ri}) x_{irkl} \end{aligned} \quad (19)$$

(۱۷-۱۸)، (۱۱-۲)

$$\sum_{k \in C \setminus \{l\}} x_{irlk} - \sum_{k \in C \setminus \{l\}} x_{irkl} = \sum_{j \in H} (z_{ijl} - z_{rjl}) \quad \forall [i, r] \in I: i < r, l \in C \quad (20)$$

$$x_{irlk} + x_{irkl} \leq y_{kl} \quad \forall [i, r] \in I: i < r \quad \forall [k, l] \in C: k < l \quad (21)$$

$$h_{irjl} \geq z_{ijl} - z_{rjl} \quad \forall [i, r] \in I: i < r, j \in H, l \in C \setminus \{j\} \quad (22)$$

$$h_{irjl} \geq z_{rjl} - z_{ijl} \quad \forall [i, r] \in I: i < r, j \in H, l \in C \setminus \{j\} \quad (23)$$

$$x_{irkl} \geq 0 \quad \forall [i, r] \in I: i < r, k \in C \setminus \{l\} \quad (24)$$

$$h_{irjl} \geq 0 \quad \forall [i, r] \in I: i < r, j \in H, l \in C \setminus \{j\} \quad (25)$$

در مدل فوق رابطه (۱۹) تابع هدف بوده که عبارت‌های آن به ترتیب مجموع هزینه‌ها بر روی لایه‌های گره به هاب، هاب ثانویه به هاب اصلی و هاب اصلی-هاب اصلی را بیان می‌کند. رابطه (۲۰) صورت دیگر رابطه (۱۲) می‌باشد. رابطه (۲۱) این اطمینان را می‌دهد که در مسیر بین هر جفت گره باید در صورت استفاده از کمان هاب اصلی این کمان‌ها ایجاد شده باشند. روابط (۲۲) و (۲۳) کمان‌های هاب ثانویه مابین نقاط در شبکه را مشخص می‌کنند. محدودیت‌های (۲۴) و (۲۵) نوع متغیرها را مشخص می‌کنند. توجه شود در صورتی که محدودیت‌های ظرفیتی در شبکه مطرح نباشد ضرورتی به ۰-۱ تعریف کردن متغیرهای مسیریابی نیست. ^۱ مدل فوق را در محاسبات Model2 می‌نامیم.

۲. محاسبات عددی

به منظور ارزیابی و اعتبارسنجی مدل‌های پیشنهادی هر دو مدل در محیط نرم افزار بهینه سازی GAMS کد گردیدند. محاسبات ریاضی انجام شده در ادامه آورده می‌شود. در آزمایش‌های انجام شده از مجموعه داده شبکه پستی ترکیه که در مرجع^۲ معرفی شده بهره گرفته شد. مجموعه داده مورد بررسی شامل اطلاعات مرسولات پستی بین ۸۱ شهر کشور ترکیه بوده و شامل حجم جریان و فاصله مابین شهرها است. در این تحقیق به جای پارامتر هزینه از پارامتر فاصله که در داده‌ها موجود بود استفاده گردید. محاسبات ارائه شده به ترتیب بر روی ۱۰، ۱۵ و ۲۵ شهر اول داده‌ها انجام شده است. برای حل مدل‌ها از دو حل‌کننده تجاری Cplex و Xpress استفاده شده است. محاسبات بر روی رایانه‌ای با پردازنده Core i3 و سرعت ۲/۵۳ گیگاهرتز، حافظه موقت سه گیگابایتی و سیستم عامل ویندوز ده انجام شده است. در جدول (۱) محاسبات مربوط به مسائلی با ۱۰ گره اول از مجموعه داده ترکیه نشان داده شده است. در این جدول چهار ستون اول بیانگر مشخصات مسأله حل شده شامل تعداد گره، تعداد هاب اصلی، تعداد هاب ثانویه و ضرایب تخفیف مورد استفاده هستند. در ستون Opt جواب بهینه تابع هدف مسأله نشان داده شده است. در ستون‌های Time و Nodes زمان حل و تعداد گره‌های درخت شاخه و برش مربوط به هر مدل و حل‌کننده‌های

1. Campbell (1994).

2. Tan /Kara (2007).

نرم افزاری به صورت جداگانه ارائه شده‌اند. سه ردیف آخر جدول معرف بیشینه، میانگین و کمینه زمان‌های حل هر ستون هستند. در این جدول مقادیر زمان‌های لازم برای حل هر مسأله گزارش و مقادیر بهتر (کمتر) پررنگ شده‌اند. از جدول (۱) می‌توان دریافت که در تمام حالات مسائل با ده گره به طور میانگین در کمتر از سه ثانیه قابل حل بوده‌اند. به علاوه در بدترین حالت این مسائل در کمتر از هفت ثانیه حل شده‌اند. در این جدول مدل دو و حل‌کننده Xpress به طور متوسط نتایج بهتری داشته‌اند. چرا که میانگین حل مسائل در این حالت ۲/۱۳ ثانیه بوده است.

در جدول (۲) محاسبات با ۱۵ گره نخست از مجموعه داده شبکه ترکیه تکرار گردید. در این جدول بهترین نتایج به حل‌کننده Cplex و مدل نخست تعلق داشته است. پس از آن مدل دوم و حل‌کننده Xpress قرار دارند. ضعیف‌ترین نتایج نیز به مدل دوم با حل‌کننده Cplex بوده است. نکته قابل ذکر در هر دو جدول تعداد گره‌های مورد نیاز در درخت شاخه و کران مدل دوم کمتر بوده و در بسیاری حالات مسأله در گره ریشه قابل حل بوده است. با این حال نتایج محاسباتی بهتر مربوط به مدل نخست بوده است. علت این نکته را می‌توان در ابعاد مدل‌های پیشنهادی جست‌وجو نمود. با توجه به اینکه مدل دوم متغیرهای چهارشاخه دارد دارای مسأله آزادسازی خطی با ابعاد بزرگتری نسبت به حالت سه شاخه بوده و در مسائل حل شده مدل نخست به طور متوسط نتایج بهتری داشته است.

جدول ۱- محاسبات عددی شبکه ترکیه با ۱۰ گره

n	p	q	(α_c, α_h)	opt (*۱۰ ^۰)	Model ^۱				Model ^۲						
					Cplex		Xpress		Cplex		Xpress				
					Nodes	Time	Nodes	Time	Nodes	Time	Nodes	Time			
۱۰	۳	۰	(۱,۱)	۱/۳۳۲۵۲۶	۱	۲/۰۲	۱	۶/۸۷	۱	۱/۸۶	۱	۲/۰۰			
				۱/۳۳۰۷۵۲	۱	۲/۶۹	۱	۲/۹۱	۱	۴/۰۰	۱	۴/۲۶			
				۱/۳۳۰۷۵۲	۱	۲/۵۷	۱	۲/۵۵	۱	۳/۲۳	۱	۳/۳۸			
				۱/۳۳۰۷۵۲	۱	۲/۵۷	۱	۲/۷۹	۱	۳/۵۷	۱	۳/۳۲			
	۴	۰		۱/۳۲۹۶۵۴	۱	۱/۹۸	۱	۲/۱۵	۱	۱/۸۷	۱	۱/۹۰			
				۱/۳۲۷۸۸۰	۱	۳/۳۷	۱	۳/۶۶	۱	۳/۳۸	۱	۳/۵۷			
				۱/۳۲۷۸۸۰	۱	۳/۳۷	۱	۴/۴۴	۱	۵/۱۸	۱	۳/۵۸			
				۱/۳۲۷۸۸۰	۱	۳/۶۶	۱	۴/۸۶	۱	۲/۲۸	۱	۲/۰۳			
	۴	۰		۱/۳۲۷۸۸۰	۱	۳/۵۳	۱	۳/۸۰	۱	۲/۶۲	۱	۲/۰۳			
				۳	۰	(۰/۸,۰/۹)	۱/۲۱۹۴۰۶	۱	۱/۷۳	۱	۰/۴۷	۱	۰/۵	۱	۰/۵۶
							۱/۱۹۹۸۸۵	۱	۲/۱۹	۱	۱/۱۱	۱	۲/۸۵	۱	۲/۱۲
							۱/۱۸۳۹۵۱	۱	۲/۱۸	۱	۱/۱۱	۱	۲/۸۴	۱	۲/۰۶
	۱/۱۷۲۳۶۷	۱	۲/۱۷				۱	۱/۱۰	۱	۲/۷۴	۱	۱/۹۲			
	۴	۰		۱/۱۵۵۲۴۱	۱	۱/۹۹	۱	۰/۶۹	۱	۰/۵۲	۱	۰/۴۸			
				۱/۱۶۵۷۱۹	۱	۲/۷۴	۱	۱/۵۴	۱	۴/۱۰	۱	۲/۱۶			
				۱/۱۵۴۱۳۵	۱	۲/۷۳	۱	۱/۶۵	۱	۲/۹۵	۱	۲/۱۵			
۱/۱۴۲۸۳۳				۱	۲/۹۰	۱	۱/۷۵	۱	۲/۶۲	۱	۲/۱۵				
۴	۰		۱/۱۳۵۶۹۶	۱	۳/۰۲	۱	۲/۹۵	۱	۲/۷۴	۱	۲/۰۱				
			۳	۰	(۰/۹,۰/۸)	۱/۲۷۵۹۶۶	۱	۱/۷۳	۱	۰/۴۶	۱	۰/۶۵	۱	۰/۵۵	
						۱/۲۳۹۹۲۳	۱	۲/۲۸	۱	۱/۴۳	۱	۲/۲۹	۱	۲/۱۳	
						۱/۲۰۵۰۵۵	۱	۲/۴۰	۱	۱/۳۳	۱	۲/۷۱	۱	۲/۲۰	
۱/۱۸۱۸۸۷	۱	۲/۵۳				۱	۱/۲۲	۱	۲/۷۳	۱	۲/۱۴				
۴	۰		۱/۲۵۷۴۴۷	۱	۱/۹۷	۱	۰/۸	۱	۰/۶۲	۱	۰/۵۸				
			۱/۲۱۸۴۰۴	۱	۲/۹۰	۱	۱/۳۳	۱	۳/۷۹	۱	۲/۲۹				
			۱/۱۹۵۲۳۶	۱	۲/۹۲	۱	۳/۱۶	۱	۲/۹۶	۱	۲/۰۶				
			۱/۱۷۲۶۳۲	۱	۳/۲۱	۱	۲/۸۵	۱	۲/۰۵	۱	۱/۹۶				
۴	۰		۱/۱۵۸۳۵۸	۱	۳/۲۱	۱	۵/۱۵	۱	۲/۴۰	۱	۲/۰۶				
			بیشینه			۳/۶۶		۶/۸۷		۵/۱۸		۴/۲۶			
			میانگین			۲/۶۱		۲/۳۷		۲/۵۹		۲/۱۳			
			کمینه			۱/۷۳		۰/۴۶		۰/۵		۰/۴۸			

همچنین از دقت در این جدول می‌توان دریافت در حالاتی که ضرایب تخفیف بر روی کمان‌های هاب یکسان در نظر گرفته شده حل مسأله به زمان بیشتری نیاز داشته است. در حالتی که تعداد هاب ثانویه برابر صفر بوده مسأله به شبکه هاب حلقوی دو لایه معرفی شده در کونتراس^۱

تبدیل می‌گردد که با توجه به جداول حل این گونه مسائل به مراتب ساده‌تر از مسأله سه لایه بوده است. در نهایت و برای حل مسائل بزرگتر در جدول (۳) محاسباتی با ۲۵ گره ترتیب داده شد.

جدول ۲- محاسبات عددی شبکه ترکیه با ۱۵ گره

n	p	q	(α_c, α_h)	opt (*۱۰ ^۶)	Model ^۱				Model ^۲						
					Cplex		Xpress		Cplex		Xpress				
					Nodes	Time	Nodes	Time	Nodes	Time	Nodes	Time			
۱۵	۳	۰	(۱,۱)	۱/۱۱۷۸۶۶	۱	۲/۲۷	۱	۱/۱۷	۱	۲/۷۶	۱	۲/۲۳			
				۱/۱۱۳۳۲۵	۱	۱۳/۰۴	۱	۱۳/۸۸	۱	۴۱۳/۰۷	۱	۲۸/۵۲			
				۱/۱۱۰۰۲۹	۱	۱۲/۹۳	۱	۱۵/۱۸	۱	۳۶۷/۱۳	۱	۲۶/۰۹			
	۴	۰		۱/۸۰۸۸۵۵	۱	۱۲/۲۸	۱	۱۰/۳۶	۱	۳۶۱/۸۵	۱	۲۳/۰۶			
				۱/۸۲۱۵۵۱	۱۲	۱۴/۵۴	۳۳	۲۶/۰۷	۱	۴/۹۹	۱	۶/۲۷			
				۱/۸۱۸۲۳۶	۵۶	۴۸/۵۱	۳۹	۷۷/۱۳	۱	۵۳۸/۷۰	۱	۵۵/۹۱			
				۱/۸۱۷۰۶۲	۲۱۷	۴۹/۹۴	۱۷	۷۳/۱۳	۱	۲۳۸/۸۰	۱	۴۶/۲۴			
	۴	۰		۱/۸۱۷۰۶۲	۴۴۵	۶۰/۱۸	۴۳	۶۲/۴۱	۱	۴۶۴/۲۰	۱۷	۱۱۹/۹۱			
				۱/۸۱۷۰۶۲	۳۴۱	۵۸/۲۷	۱۰۳	۱۱۷/۲۵	۱	۴۴۲/۰۳	۳	۶۷/۷۰			
				۳	۰	(۰/۸,۰/۹)	۱/۶۷۲۰۷۷	۱	۲/۸۶	۱	۱/۰۴	۱	۲/۵۰	۱	۲/۶۷
							۱/۶۴۹۶۵۰	۱	۱۰/۲۲	۱	۱۱/۸۹	۱	۳۳۲/۰۱	۱	۲۰/۸۷
	۱/۶۲۱۶۱۱	۱	۹/۹۳				۱	۱۰/۶۱	۱	۳۳۳/۲۶	۱	۱۹/۱۵			
۳	۰		۱/۶۱۳۶۱۹	۱	۸/۹۴	۱	۹/۱۹	۱	۲۶۰/۱۷	۱	۲۱/۶۳				
			۴	۰		۱/۶۲۹۰۴۰	۶	۱۲/۶۹	۱	۱۰/۸۷	۱	۳/۹۶	۱	۲/۹۶	
						۱/۶۱۷۱۱۱	۴۹	۴۰/۳۱	۲۵	۶۹/۹۵	۱	۲۳۶/۶۹	۱	۳۳/۴۲	
						۱/۵۹۸۵۷۵	۲۸	۳۴/۵۰	۹	۶۰/۰۴	۱	۳۴۴/۶۷	۱	۲۳/۱۸	
۱/۵۸۵۵۵۸۲	۴۲	۳۲/۴۱				۱۱	۶۵/۲۰	۱	۲۹۳/۵۱	۱	۲۴/۸۵				
۴	۰		۱/۵۷۲۹۲۱	۲۰	۳۶/۰۷	۲۱	۶۵/۵۵	۱	۲۸۴/۶۷	۱	۲۳/۳۸				
			۳	۰	(۰/۹,۰/۸)	۱/۴۴۹۷۱	۱	۲/۲۷	۱	۱/۱۲	۱	۲/۵۸	۱	۲/۵۲	
						۱/۷۰۱۴۰۳	۱۰	۱۷/۹۵	۱	۲۶/۹۹	۱	۳۴۰/۲۴	۱	۲۸/۰۹	
						۱/۶۶۵۴۱۹	۱	۱۸/۱۸	۳	۳۲/۹۱	۱	۳۳۴/۷۶	۱	۲۸/۸۲	
۱/۶۲۱۳۷۲	۱	۱۶/۲۳				۱	۱۸/۰۵	۱	۳۳۶/۰۵	۱	۲۷/۹۶				
۴	۰		۱/۷۳۰۲۹۶	۱	۱۱/۸۹	۱	۱۰/۹۰	۱	۴/۰۴	۱	۶/۶۶				
			۱/۶۸۶۷۲۷	۴۸	۳۹/۱۲	۲۳	۶۱/۰۲	۱	۳۹۴/۷۹	۱	۴۶/۷۵				
			۱/۶۵۲۶۸۰	۱۱۵	۴۷/۵۰	۲۵	۵۹/۷۳	۱	۳۷۱/۳۶	۱	۱۰۶/۱۳				
			۱/۶۲۶۶۹۴	۸۴	۴۴/۱۲	۲۱	۷۶/۸۲	۱	۳۸۸/۲۶	۱	۶۵/۹۸				
۴	۰		۱/۶۰۱۳۷۲	۴۰	۵۸/۹۰	۴۳	۸۹/۳۲	۱	۳۹۸/۶۹	۱	۴۳/۴۷				
			بیشینه		۶۰/۱۸		۱۱۷/۲۵		۵۳۸/۷۰		۱۱۹/۹۱				
			میانگین		۲۶/۵۳		۳۹/۹۲		۲۹۱/۷۰		۳۳/۵۰				
			کمینه		۲/۲۷		۱/۰۴		۲/۵		۲/۲۳				

جدول ۳- محاسبات شبکه ترکیه با ۲۵ گره

n	p	q	(α_c, α_h)	opt	Model\				Improvement			
					Cplex		Cplex(+)					
					Nodes	Time	Nodes	Time				
				(*1.0')								
۲۵	۳	۰	(۱,۱)	۵/۷۵۳۲۵۱	۱	۷/۲۵	۱	۲/۹۴	۵۹/۲۴-			
				۵/۷۲۹۶۱۰	۱۸	۱۴۰/۸۰	۱۶	۹۶/۹۳	۳۱/۱۵-			
				۵/۷۰۹۰۳۵	۱۶	۱۲۲/۰۸	۱۸	۸۶/۰۶	۲۹/۵۰-			
				۵/۶۹۹۹۱۶	۲۶	۱۱۳/۵۰	۲۰	۸۶/۷۹	۲۳/۵۳-			
	۴	۰	(۱,۱)	۵/۸۱۸۵۱۸	۲۳۲	۷۸/۲۸	۲۷۰	۸۱/۷۱	۴/۳۸			
				۵/۷۸۱۸۰۵	۲۵۷۵	۴۰۲۰/۹۹	۱۸۹۳	۱۷۷۷/۵۹	۵۵/۷۹-			
				۵/۷۸۰۵۷۱	۲۳۵۹	۳۰۸۳/۴۱	۲۹۵۶	۳۱۴۱/۷۴	۱/۸۹			
				۵/۷۸۰۵۷۱	۶۹۹۱	۵۹۳۹/۹۲	۳۶۳۷	۳۹۷۹/۹۲	۳۲/۹۹-			
	۴	۰	(۱,۱)	۵/۷۸۰۵۷۱	۳۱۹۸	۳۱۷۸/۸۳	۳۷۰۳	۲۷۷۰/۸۸	۱۲/۸۳-			
				۳	۰	(۰/۸,۰/۹)	۵/۳۸۴۱۲۰	۱	۷/۵۰	۱	۷/۴۷	۰/۴-
							۵/۲۳۸۱۷۴	۱	۵۵/۷۱	۴	۳۸/۹۹	۳۰/۰۱-
							۵/۲۲۵۳۴۴	۴۸	۹۸/۳۵	۲۸	۱۰۲/۶۳	۴/۳۵
	۵/۲۰۲۵۲۸	۸۴	۱۷۱/۹۵				۹۰	۶۷/۵۳	۶۰/۷۲-			
	۴	۰	(۰/۸,۰/۹)	۵/۱۸۶۹۱۶	۱۷	۲۴/۱۵	۱۵	۲۷/۴۶	۱۳/۷۰			
				۵/۱۳۹۷۱۱	۸۳	۱۵۹/۹۳	۷۶	۲۰۳/۳۵	۲۷/۱۴			
				۵/۱۰۹۷۲۶	۱۸۹	۱۷۱/۰۳	۱۲۰	۲۳۳/۵۱	۳۶/۵۳			
۵/۰۸۹۱۴۵				۲۶۹	۱۹۱/۳۸	۵۹۶	۲۹۳/۱۸	۱۵۷/۶۹				
۴	۰	(۰/۸,۰/۹)	۵/۰۷۶۳۱۵	۴۰۲	۲۹۰/۴۸	۱۵۶۹	۶۷۷/۹۷	۱۳۳/۳۹				
			۳	۰	(۰/۹,۰/۸)	۵/۵۶۸۶۸۶	۱	۶/۱۱	۱	۶/۹۹	۱۴/۴۰	
						۵/۳۹۵۲۰۹	۲۵	۱۱۶/۹۶	۲۲	۱۱۵/۳۴	۱/۳۸-	
						۵/۲۴۷۱۸۲	۱	۸۹/۴۲	۱	۹۴/۲۴	۵/۳۹	
۵/۱۸۷۲۱۲	۱	۱۲۵/۱۷				۱	۷۱/۳۰	۴۳/۰۳-				
۴	۰	(۰/۹,۰/۸)	۵/۵۲۸۰۵۹	۵۳	۴۲/۷۷	۴۹	۲۳/۱۱	۰/۸۹				
			۵/۳۵۶۴۰۹	۲۱۶	۵۹۶/۱۵	۱۷۰	۴۶۳/۴۴	۲۲/۲۶-				
			۵/۲۸۲۶۷۹	۶۰۹	۱۱۴۹/۲۰	۳۷۷	۶۲۳/۳۵	۴۵/۷۵-				
			۵/۲۵۰۲۸۴	۱۵۳۷	۱۶۲۷/۲۳	۱۱۴۲	۸۹۷/۴۴	۴۴/۸۴-				
۴	۰	(۰/۹,۰/۸)	۵/۲۱۸۴۷۷	۲۹۹۲	۳۲۸۶/۸۵	۲۶۴۶	۱۸۵۱/۰۸	-۴۳/۶-				
			کمینه		۶/۱۱		۲/۹۴					
			میانگین		۹۲۲/۰۵		۶۶۸/۳۵					
			بیشینه		۵۹۳۹/۹۲		۳۹۷۹/۹۲					

در جدول (۳) بر حل مسأله در حالت پارامترهای پیش فرض حل کننده Cplex ستون دیگری تحت عنوان Cplex+ اضافه گردیده که مربوط به حل مسأله آزادسازی خطی به کمک الگوریتم Barrier به جای سیمپلکس است. شایان ذکر است برای حل مسائل برنامه‌ریزی

خطی علاوه بر روش سیمپلکس روش‌های نقطه درونی نیز وجود دارند. در روش سیمپلکس با استفاده از نقاط گوشه‌ای جواب بهینه یافت می‌شود اما در روش‌های Barrier از درون فضای جواب برای رسیدن به حل بهینه استفاده می‌شود. حل‌کننده نرم‌افزاری Cplex این انتخاب را به کاربر می‌دهد که با تغییر در روش حل مسأله (تغییر و انتخاب ورودی‌های حل‌کننده) متد دیگری برای حل مسأله فراخوان شود. ما در جدول (۳) و در ستون Improvement مقدار صرفه‌جویی به دست آمده در حل مسأله به کمک فراخوان متد Barrier را گزارش کرده‌ایم. اعداد مندرج در این ستون از طریق فرمول ۲۶ محاسبه شده‌اند:

$$\text{Improvement} = \frac{\text{Cplex}(+)Time - \text{Cplex Time}}{\text{Cplex Time}} \quad (26)$$

اعداد منفی در این ستون به این مفهوم‌اند که زمان حل مسأله به کمک روش Barrier کمتر از حالت سیمپلکس بوده است. از دقت در جدول می‌توان دریافت که در ۱۶ مسأله از ۲۷ مسأله جدول (۳) حل مسائل آزادسازی خطی با الگوریتم Barrier بهتر از سیمپلکس بوده است. ضمن آنکه متوسط زمان لازم برای حل مسائل در این حالت حدود ۶۶۹ ثانیه بوده در حالیکه همین مقدار برای روش سیمپلکس حدود ۹۲۳ ثانیه است.

در انتها، چند توصیه سیاستی به شرح زیر مطرح خواهد شد. اگر شبکه‌های هاب به شکل مناسبی طراحی و مدیریت شود، می‌تواند یک حوزه محرک برای کارایی هزینه‌های ارسال جریان و رضایتمندی کاربران شبکه‌ها باشد. از این‌رو مدل‌های توسعه داده شده در این مقاله، دارای پیامدهای کاربردی و مدیریتی است. این مدل‌ها به مدیران در طراحی شبکه‌ای از هاب‌ها با لحاظ نمودن ویژگی‌های مهمی نظیر ساختار سلسله مراتبی مراکز ارائه دهنده خدمت و اتصال هاب‌های اصلی به فرم حلقه کمک می‌کند. در واقع مدل‌های ریاضی پیشنهاد شده اطلاعات مهمی نظیر نحوه تخصیص هاب‌ها، احداث کمان‌ها و مقدار جریان عبوری فراهم می‌نماید که می‌تواند به وسیله مدیران در تصمیم‌گیری‌های استراتژیک به کار گرفته شود.

نتایج و پیشنهادات آتی

در این مقاله مسأله جایابی شبکه‌ای از هاب‌های سلسله مراتبی با ساختار مرکزی حلقوی

معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. این گونه مسائل می‌توانند زمانی که ایجاد شبکه هاب‌های کامل به دلیل هزینه زیاد غیر ممکن باشد مورد استفاده قرار گیرند. توسعه شبکه‌های مخابراتی و حمل‌ونقل سریع از جمله موارد استفاده این گونه ساختارها هستند. در ادامه تحقیق، دو مدل متفاوت برای مسأله توسعه داده شد. مدل‌های پیشنهادی با توجه به نوع متغیرهای مورد استفاده سه شاخصه مبتنی بر جریان و چهار شاخصه مبتنی بر مسیر توسعه داده شده‌اند. در ادامه، محاسبات عددی مدل‌های پیشنهادی با دو حل‌کننده نرم‌افزاری متفاوت مورد ارزیابی و مطالعه قرار گرفتند. مطالعات عددی نشان داد که حل مدل سه شاخصه علیرغم داشتن آزادسازی خطی ضعیفتر سریعتر انجام می‌شود که علت امر را می‌توان در بزرگ بودن مدل چهار اندیشه جست. همچنین به منظور حل مدل سه شاخصه در زمان کمتر، بررسی‌هایی بر روی پارامترهای حل‌کننده نرم‌افزاری سیپلکس انجام و مشاهده گردید که استفاده از روش‌های نقطه درونی به جای سیمپلکس در حل فاز آزادسازی مسأله می‌تواند کارآمدتر باشد. یادآور می‌شود روش‌های نقطه درونی بخشی از پکیج نرم‌افزاری Cplex بوده که در صورت خواست کاربر می‌توان از آنها بهره جست.

در واقع نوآوری‌های تحقیق را می‌توان در معرفی یک مسأله جدید به ادبیات موضوع جایابی هاب و توسعه دو مدل ریاضی متفاوت و مقایسه آنها دانست. به عنوان پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی می‌توان به توسعه الگوریتم‌های حل دقیق یا ابتکاری کارآمد برای حل مسائل با اندازه بزرگتر، انجام مطالعات موردی به منظور پیاده‌سازی مدل بر روی مسائل واقعی، توسعه مدل در حالات عدم قطعیت و حالت محدودیت ظرفیت در هاب‌ها یا یال‌های شبکه اشاره نمود.

منابع

- Mur, S, Kara, B Y (2009); A Hub Covering Network Design Problem For Cargo Applications In Turkey, In: The Journal Of The Operational Research Society 60 (10), pp. 1349–1359, [Http://Www.Jstor.Org/Stable/40295695](http://www.jstor.org/stable/40295695).
- Alumur, Sibel A. Et. Al. (2009): The Design Of Single Allocation Incomplete Hub Networks, In: Transportation Research Part B: Methodological 43 (10), pp. 936–951, [Http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S0191261509000496](http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0191261509000496), Zugriff: 27.05.2014.
- Alumur, Sibel A. Et. Al. (2012): Hierarchical Multimodal Hub Location Problem

- With Time-Definite Deliveries, In: *Transportation Research Part E: Logistics And Transportation Review* 48 (6), pp. 1107–1120, [Http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S136655451200035X](http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S136655451200035X), Zugriff: 03.06.2014.
- Calik, Hatice Et. Al. (2009): A Tabu-Search Based Heuristic For The Hub Covering Problem Over Incomplete Hub Networks, In: *Computers And Operations Research* 36, pp. 3088–3096.
- De Camargo, Ricardo S. Et. Al. (2017): Formulations And Decomposition Methods For The Incomplete Hub Location Network Design Problem With And Without Hop-Constraints, In: *Applied Mathematical Modelling* 51, pp. 274–301, [Http://Dx.Doi.Org/10.1016/J.Apm.2017.06.035](http://Dx.Doi.Org/10.1016/J.Apm.2017.06.035).
- Campbell, J F Et. Al. (2005): Hub Arc Location Problems: Part I: Introduction And Results, In: *Management Science* 51 (10), pp. 1540–1555, [Http://Www.Jstor.Org/Stable/20110442](http://Www.Jstor.Org/Stable/20110442).
- Campbell, James F (1994): Integer Programming Formulations Of Discrete Hub Location Problems, In: *European Journal Of Operational Research* 72 (2), pp. 387–405, [Http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/0377221794903182](http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/0377221794903182).
- Contreras, Ivan Et. Al. (2009): Tight Bounds From A Path Based Formulation For The Tree Of Hub Location Problem, In: *Computers & Operations Research* 36 (12), pp. 3117–3127, [Http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S0305054808002669](http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S0305054808002669), Zugriff: 27.05.2014.
- Contreras, Ivan Et. Al. (2010): The Tree Of Hubs Location Problem, In: *European Journal Of Operational Research* 202 (2), pp. 390–400, [Http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S0377221709004214](http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S0377221709004214), Zugriff: 27.05.2014.
- Contreras, Ivan Et. Al. (2013): The Cycle Hub Location Problem, In: *Thecnical Report* 59, S. 2013.
- Contreras, Ivan Et. Al. (2016): Exact And Heuristic Approaches For The Cycle Hub Location Problem, In: *Annals Of Operations Research*, [Http://Link.Springer.Com/10.1007/S10479-015-2091-2](http://Link.Springer.Com/10.1007/S10479-015-2091-2).
- Current, John R/Schilling, David A (1994): The Median Tour And Maximal Covering Tour Problems: Formulations And Heuristics, In: *European Journal Of Operational Research* 73 (1), pp. 114–126, [Http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/037722179490149X](http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/037722179490149X).
- Dukkanci, Okan/Kara, Bahar Y. (2017): Routing And Scheduling Decisions In The Hierarchical Hub Location Problem, In: *Computers And Operations Research* 85, pp. 45–57, [Http://Dx.Doi.Org/10.1016/J.Cor.2017.03.013](http://Dx.Doi.Org/10.1016/J.Cor.2017.03.013).
- Farahani, Reza Zanjirani Et. Al. (2013): Hub Location Problems: A Review Of Models, Classification, Solution Techniques, And Applications (= 64).
- Gelareh, Shahin/Nickel, Stefan (2011): Hub Location Problems In Transportation Networks, In: *Transportation Research Part E: Logistics And Transportation Review* 47 (6), pp.

- 1092–1111, [Http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S1366554511000597](http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S1366554511000597), Zugriff: 27.05.2014.
- Gelareh, Shahin/Pisinger, David (2011): Fleet Deployment, Network Design And Hub Location Of Liner Shipping Companies, In: *Transportation Research Part E: Logistics And Transportation Review* 47, pp. 947–964.
- Gendreau, Michel Et. Al. (1997): The Covering Tour Problem, In: *Operations Research* 45 (4), pp. 568–576, [Http://Dx.Doi.Org/10.1287/Opre.45.4.568](http://Dx.Doi.Org/10.1287/Opre.45.4.568), Doi: 10.1287/Opre.45.4.568.
- Karimi, Hossein/Setak, Mostafa (2016): Flow Shipment Scheduling In An Incomplete Hub Location-Routing Network Design Problem, In: *Computational And Applied Mathematics* (7), [Http://Link.Springer.Com/10.1007/S40314-016-0368-Y](http://Link.Springer.Com/10.1007/S40314-016-0368-Y).
- Labbé, Martine Et. Al. (2004): The Ring Star Problem: Polyhedral Analysis And Exact Algorithm, In: *Networks* 43 (3), S. 177–189, [Http://Dx.Doi.Org/10.1002/Net.10114](http://Dx.Doi.Org/10.1002/Net.10114).
- Labbé, Martine Et. Al. (2005): Locating Median Cycles In Networks, In: *European Journal Of Operational Research* 160 (2), pp. 457–470, [Http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0377221703005563](http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0377221703005563).
- Lee, Youngho Et. Al. (1996): A Hub Location Problem In Designing Digital Data Service Networks: Lagrangian Relaxation Approach, In: *Location Science* 4 (3), pp. 185–194, [Http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0966834996000095](http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0966834996000095).
- O’Kelly, Morton E (1987): A Quadratic Integer Program For The Location Of Interacting Hub Facilities, In: *European Journal Of Operational Research* 32 (3), pp. 393–404, [Http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0377221787800073](http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0377221787800073).
- De Sá, Elisangela Martins Et. Al. (2013): An Improved Benders Decomposition Algorithm For The Tree Of Hubs Location Problem, In: *European Journal Of Operational Research* 226 (2), pp. 185–202, [Http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0377221712008211](http://Www.Sciencedirect.Com/Science/Article/Pii/S0377221712008211).
- Tan, Pinar Z./Kara, Bahar Y. (2007): A Hub Covering Model For Cargo Delivery Systems, In: *Networks* (= 49), pp. 28–39.
- Yaman, Hande (2008): Star P-Hub Median Problem With Modular Arc Capacities, In: *Computers And Operations Research* 35, pp. 3009–3019.
- Yaman, Hande (2009): The Hierarchical Hub Median Problem With Single Assignment, In: *Transportation Research Part B: Methodological* 43 (6), pp. 643–658, [Http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S0191261509000149](http://Linkinghub.Elsevier.Com/Retrieve/Pii/S0191261509000149), Zugriff: 27.05.2014.
- Yoon, M-G./Current, J (2008): The Hub Location And Network Design Problem With Fixed And Variable Arc Costs: Formulation And Dual-Based Solution Heuristic, In: *The Journal Of The Operational Research Society* 59 (1), S. 80–89, [Http://Www.Jstor.Org/Stable/4622884](http://Www.Jstor.Org/Stable/4622884).

